به نام زندگی

کلاسها در تاریخ ۲۱ و ۲۲ فروردین تشکیل نمی‌شوند

مروری بر آنالیز ترکیبی

- مفهوم ترکیب

Combination

نحوه‌ی انتخاب m شیء از بین n شیء به طوری که ترتیب در آنها مهم نباشد

را ترکیب m شیء از n شیء می‌دهیم

$$C_m^n = \binom{n}{m} = \frac{P_m^n}{m!} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

با توجه به تعریف

$$\Longrightarrow \quad C_m^N = C_{N-m}^N$$

مثال: تعداد زیرمجموعه های 4 عضوی از یک مجموعه ده عضوی چند است؟

$$C_4^{10} = \frac{10!}{4!\,6!} = C_6^{10}$$

مثال: می خواهیم ۶ توپ قرمز و ۴ توپ آبی را در ده جعبه قرار دهیم به طوری که در هر جعبه فقط یک توپ قرار بگیرد. مقدار حالت های ممکن چقدر است؟

$$C_6^{10} = C_4^{10}$$

مسئله معادل انتخاب ۶ جعبه از ۱۰ جعبه برای توپ های قرمز است اما انتخاب ۴ جعبه از ۱۰ جعبه برای توپ های آبی!

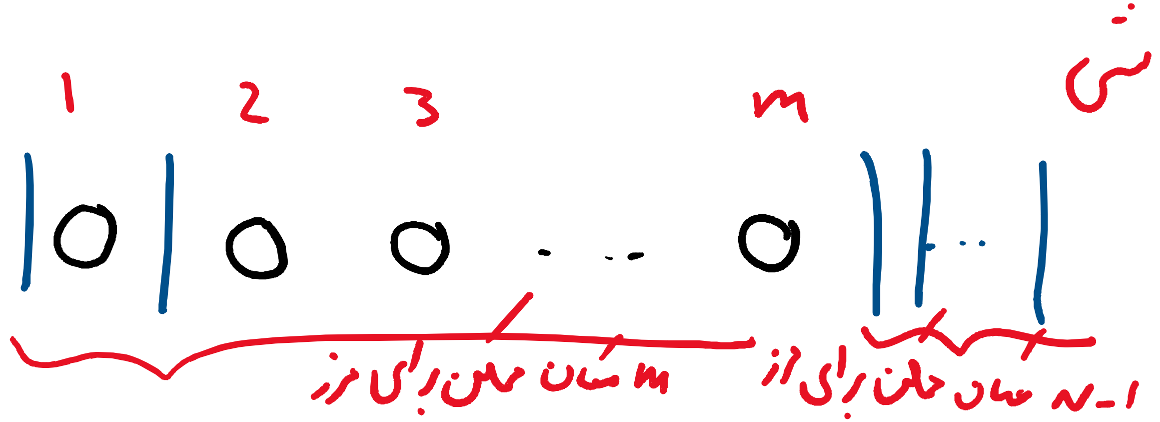
* به طور کلی اگر بخواهیم m شیء را در N جعبه قرار دهیم به طوری که در هر جعبه فقط یک شیء قرار بگیرد، تعداد حالت های ممکن برابر است با:

$$C_m^N = \frac{N!}{m!\,(N-m)!} = \binom{N}{m} \qquad m \leq N$$

* در مسئله ی بالا اگر ترتیب قرار گرفتن اشیاء در جعبه ها اهمیت داشته باشد، تعداد حالت‌های ممکن برابر است با:

$$m!\, C_m^N = \frac{N!}{(N-m)!} = P_m^N$$

* اگر بخواهیم m شیء را در n جعبه قرار دهیم، به طوری که در هر جعبه، به هر تعداد ممکن شیء قرار بگیرد (جعبه می‌تواند خالی هم باشد) تعداد حالت های ممکن برابر است با (یا تعداد حالت هایی که m شیء را بین n نفر تقسیم کنیم. به طوری که به هر نفر بتواند از صفر تا m شیء تعلق بگیرد)



برای تقسیم بندی m شیء در n جعبه، لازم است که $n-1$ مرز بین اشیاء قرار دهیم. بنابراین تعداد حالت ها برابر

خواهیم دید با تعداد حالت های ممکن برای انتخاب $N-1$ مکان از بین $m+N-1$
مکان ممکن برای مرزهای تقسیم بندی.

$$\binom{m+N-1}{N-1} = C^{m+N-1}_{N-1} = C^{m+N-1}_{m}$$

مثال: معادله‌ی $x_1+x_2+\dots+x_N = m$ چند جواب صحیح غیرمنفی
دارد؟ (یعنی جواب صفر یا مثبت)

$$|\underbrace{1|1|1\ \dots\ 1}_{m\ \text{تا}}|\,|\,|$$

مسئله معادل تقسیم کردن m تا سیب بین n پارامتر $x_1, x_2, \dots, x_n$ است.

بنابراین تعداد جواب‌های معادله برابر است با

$$C^{m+n-1}_{n-1}$$

به عنوان یک مثال عددی معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_7 = 5$ چند جواب صحیح غیرمنفی دارد؟

$$C_6^{5+7-1} = C_6^{11}$$

$$1 \mid 1 \mid 1 \mid 1 \mid 1 \mid \mid$$

x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 $x_6 = 0$ $x_7 = 0$

* اگر بخواهیم m شیء را در n جعبه قرار دهیم به طوری که در هر جعبه دست کم یک شیء قرار بگیرد یا m شیء را بین n نفر تقسیم کنیم به طوری که به هر نفر دست کم یک شیء برسد، تعداد حالت های ممکن برابر است با

(در این حالت باید $m \geq n$)

در این مسأله تعداد مکان هایی که می توانیم مرزهای تقسیم بندی را قرار دهیم برابر $m-1$ است. بنابراین جواب مسأله تعداد نحوه ی انتخاب $n-1$ مکان برای $n-1$ مرز از بین $m-1$

$$C^{m-1}_{N-1} = \frac{(m-1)!}{(N-1)!\,(m-N)!}$$

ممکن است $m \geq N$

مثال: معادله ی $x_1 + x_2 + \dots + x_N = m$ با شرط $m \geq N$ چند جواب صحیح مثبت دارد؟

1 ... $N-1$ مرز

$$\underbrace{1 \;|\; 1 \;\cdots\; |\; 1}_{m \text{ تا یک}}$$

مسئله معادل تقسیم کردن m تا یک به N قسمت است به طوری که در هر قسمت دست کم یک عدد 1 وجود داشته باشند.

$$C^{m-1}_{N-1}$$

به عنوان مثال عددی ، معادله ی $x_1 + x_2 + \cdots + x_7 = 10$ چند جواب

صحیح مثبت دارد ؟

$$\underbrace{1}_{x_1=1} \;\Big|\; \underbrace{1\quad 1}_{x_2=2} \;\Big|\; \underbrace{1\quad 1}_{x_3=2} \;\Big|\; \underbrace{1}_{x_4=1} \;\Big|\; \underbrace{1}_{x_5=1} \;\Big|\; \underbrace{1\quad 1}_{x_6=2} \;\Big|\; \underbrace{1}_{x_7=1}$$

$$C_6^9 = \frac{9!}{6!\,3!}$$

همان طور که از ریاضیات می دانیم ، بین ترکیب و بسط دو جمله ای جبری ارتباط برقرار است. می دانیم

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i} \qquad (*)$$

$$\underbrace{\binom{n}{i}} \; \underbrace{x\,x \cdots x}_{i \text{ بار}} \; \underbrace{y\,y \cdots y}_{n-i \text{ بار}}$$

تعداد نحوه‌های چینش i تا x و $n-i$ تا y به طوری که ترتیب اهمیت ندارد.

در بسط دو جمله‌ای (*) اگر قرار دهیم $x = y = 1$ خواهیم داشت

$$2^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$$

مثال: تعداد کل زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی n عضوی برابر است با 2^n

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n \qquad \binom{n}{i}$$

$\binom{n}{0}$: صفر عضو $\{\ \}$

$\binom{n}{1}$: تعداد زیرمجموعه های یک عضوی

$\binom{n}{n}$: n عضوی

$\binom{n}{i}$: تعداد زیرمجموعه‌های i عضوی از یک مجموعه n عضوی

مثال: در یک فضای n بعدی ، تعداد کل بردارهای باینری چقدر است؟

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

برداری به طول n که المان‌های ۰ و ۱ می‌توانند باشند.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & & n & \text{مکان} \\ \_\_ & \_\_ & \cdots & \_\_ & \\ \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \\ 2 & 2 & & 2 & \text{حالت‌ها} \end{array}$$

$\Rightarrow$ تعداد کل حالت‌ها $= 2^n$

$$2^N = \binom{N}{0} + \binom{N}{1} + \binom{N}{2} + \cdots + \binom{N}{N}$$

تعداد بردارهای به طول N با المان‌های تمام صفر

تعداد بردارهای به طول N که تعداد یک‌ها برابر 1 و تعداد صفرها N-1

تعداد بردارها با 2 تا یک و بقیه صفر

بردار تمام یک

- مفهوم ترکیب تعمیم یافته

اگر بخواهیم N شیء را به r دسته تقسیم بندی کنیم به طوری که در دسته‌ی iام m_i عضو وجود داشته باشد، تعداد حالت‌های ممکن با استفاده از ترکیب تعمیم یافته به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\frac{N!}{m_1!\, m_2! \cdots m_r!} = C^{N}_{m_1, m_2, \dots, m_r} = \binom{N}{m_1, m_2, \dots, m_r}$$

$$\sum_{i=1}^{r} m_i = N$$

به طور مثال 20 توپ داریم که 6 تا قرمز، 4 تا آبی و 15 تا زرد است.

یا تقسیم نسبی 20 نفر به سه گروه 6 تایی و 4 تایی و 15 تایی

در ریاضیات ترکیب تعمیم یافته با بسط چندجمله‌ای ها ارتباط دارد،

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_r)^N = \sum_{\substack{m_1, \ldots, m_r \\ \sum_{i=1}^{r} m_i = N}} \binom{N}{m_1, m_2, \ldots, m_r} a_1^{m_1} a_2^{m_2} \cdots a_r^{m_r}$$

ما این مورد بر روی آنالیز ترکیبی می خواهیم چند مثال از محاسبه ی احتمال پیش آمدها را بررسی کنیم . برای محاسبه

$$P_A = \frac{N_A}{N}$$

N_A : تعداد حالت های مورد نظر

N : کل تعداد حالت های ممکن

از آنالیز ترکیبی کمک می گیریم.

مثال ۱ - یک سکه را ۵ بار پرتاب می‌کنیم، احتمال اینکه دست کم سه بار شیر بیاید چقدر است؟

$$P_A = \frac{N_A}{N}$$

N_A : تعداد حالت های مورد نظر = تعداد حالت هایی که دست کم سه بار شیر بیاید

$N_A = \{$ تعداد دفعاتی که سه بار شیر بیاید $\} + \{$ تعداد دفعاتی که ۴ بار شیر بیاید $\} + \{$ تعداد دفعاتی که ۵ بار شیر بیاید $\}$

N : کل تعداد حالت های ممکن $= |\Omega| = 2^5$

$\Omega = \{H, T\} \times \{H, T\} \times \dots \times \{H, T\}$ (پنج بار)

$$\Rightarrow N_A = \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = \frac{4 \times 5}{2} + \frac{5!}{4!} + \frac{5!}{0!\,5!}$$

$$= 10 + 5 + 1 = 16$$

$$\Rightarrow P_A = \frac{16}{2^5} = \frac{1}{2}$$

مثال: می‌خواهیم m توپ را در n جعبه قرار دهیم به طوری که در هر جعبه فقط یک توپ قرار بگیرد. احتمال اینکه m توپ در m جعبه مورد نظر ما قرار بگیرند چقدر است؟ $(n \geq m)$

$$P_A = \frac{N_A}{N}$$

N: کل تعداد حالت‌های ممکن $\binom{n}{m}$

N_A: تعداد حالت‌های مورد نظر $= 1$

$$\Rightarrow P_A = \frac{1}{\binom{n}{m}} = \frac{m!\,(n-m)!}{n!}$$

* در مثال قبل اگر ترتیب ها مشخص نباشند، جواب مسأله چه تغییری می کند؟

$$P_B = \frac{N_B}{N}$$

N_B : تعداد حالت های مورد نظر

$m!$

N : کل تعداد حالت های ممکن

$$m!\, C^n_m = P^n_m$$

$$\Rightarrow \quad P_B = \frac{m!}{P_m^n} = \frac{m!}{m!\, C_m^n} = \frac{1}{C_m^n} = \frac{m!\,(n-m)!}{n!}$$

مثال: در جعبه‌ای ۶۰ توپ قرمز و ۴۰ توپ آبی داریم. از این جعبه ۲۰ توپ را به صورت تصادفی انتخاب می‌کنیم (بدون جایگزینی) احتمال اینکه ۱۰ توپ آبی و ۱۰ توپ قرمز باشد، چقدر است؟

$$P_A = \frac{N_A}{N}$$

N_A : تعداد حالت‌های مورد نظر $\binom{40}{10}\binom{60}{10}$

N : کل تعداد حالت‌های ممکن $\binom{100}{20}$

$$\Rightarrow \quad P_A = \frac{\binom{40}{10}\binom{60}{10}}{\binom{100}{20}}$$

* در مسئله‌ی قبل اگر توپ‌ها یکسان نباشند، جواب مسئله چه تغییری می‌کند؟

$$P_B = \frac{N_B}{N}$$

N_B : تعداد حالت‌های مورد نظر $20! \binom{40}{10} \binom{60}{10}$

N : کل تعداد حالت‌های ممکن $20! \binom{100}{20} = P^{100}_{20}$

$$\Rightarrow P_B = \frac{20!\binom{40}{10}\binom{60}{10}}{20!\binom{100}{20}} = \frac{\binom{40}{10}\binom{60}{10}}{\binom{100}{20}}$$